اسم المحاضرة .
--- النهايات والاستقرار ---

اسم الدكتور/ة
الاستاذ - ماهر هلال

التاريخ :

اسم المادة رياضيات

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\to 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad , \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)=e^a \quad , \quad \lim_{x\to\infty}a^x=0 \quad : |a|<1$$

$$\lim_{x\to\infty}a^x=\infty \quad : |a|>1$$

قاعدة اوبتال:

تستخدم هذه الطريقة عند حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

عند دراسة نهاية التابع فنستخدم قاعدة اوبتال وهي نهاية $\frac{\text{مشتق البسط}}{\text{مشتق المقام}}$

ملاحظة

إذا طبقنا قاعدة اوبتال ووجدنا أن التابع عاد مجدداً إلى $\frac{0}{0}$ فإننا نأخذ نهاية $\frac{\text{مشتق البسط}}{\text{مشتق المقام}}$ مرة ثانية وهكذا حتى نحصل على قيمة معينة

الدالة تملك نهاية إذا تحقق الشرط.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$$

تكون الدالة مستمرة عند x_0 إذا كانت نهايتها.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

* ادرس نهاية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) \neq \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = 1$$

الدالة ليست مستمرة ولا تملك نهاية.

Ex : ناقش حسب قيم a استمرار الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 + \sin a & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{a \to 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 0} f(x) \overset{\text{ابتدال}}{=} \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{لوبيتال}}{=} \lim \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \sin a = \frac{1}{2}$$

$$\sin a = \frac{1}{2} - 1$$

$$\sin a = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = \frac{-\pi}{6} \text{ أو } = \frac{7\pi}{6} \text{ أو } \pi + \frac{\pi}{6}$$

Ex2: أوجد النهاية التالية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$$

$$\overset{\text{لوبيتال}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x + 5}{1} = 7$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+6)(x-1)}{(x-1)} = 7$$

* أوجد النهاية التالية (سؤال دورة)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{x+5}$$

$$t = x + 5$$

$$\Rightarrow x = t - 5$$

$$t \to \infty \leftarrow x \to \infty$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t-9}{t-2}\right)^t = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\frac{t-9}{t}}{\frac{t-2}{t}}\right)^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{9}{t}}{1 - \frac{2}{t}}\right)^t = \frac{e^{-9}}{e^{-2}} = e^{-7}$$

طريقة 2:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^x \cdot \lim \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^5$$

$$\frac{e^{-4}}{e^{3}} = e^{-7} \qquad (1)$$

سؤال دورة
$$\lim_{x\to 0} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

امتحان
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{-x^2}{1}\right) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

* اوجد النهاية: $\lim \frac{5\cdot 3^x - 4\cdot 5^{x+1}}{7\cdot 2^x - 2\cdot 5^x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\left(\frac{3}{5}\right)^x - 4\cdot 5}{7\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2} = \frac{20}{2} = 10$$

* $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right) =$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

* $\lim \frac{3+\sin x^2}{x}$

$$-1 < \sin x^2 < +1$$

$$\frac{2}{x} < 3+\sin x^2 < \frac{4}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0\end{array}\right] \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 3+\sin x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x} = 1 \qquad x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$* \quad A^{B} = e^{B\ln A} = \ln e^{B\ln A} = e^{B\ln A} = B e^{\ln A}$

$* \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1-x} - 1} \overset{\text{اوبتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1-x)^{\frac{1}{3}} - 1}$

$\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{3}(1-x)^{-\frac{2}{3}}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{1} = \frac{-3}{2}$

$* \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

$\overset{\text{اوبتال}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin x\,(\cos x)^{-\frac{1}{2}}}{2x} \overset{\text{اوبتال}}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{x} (\cos x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$* \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) \overset{\text{اوبتال}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$

* أوجد قيمة الثابتة b , a بحيث تكون الدالة مستمرة (متصلة)

$f(x) = \begin{cases} ax - b & x \le 1 \\ 3x & 1 < x < 2 \\ 6x - a & x \ge 2 \end{cases}$

الحل:

$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = a - b$

$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = 3$

$\longrightarrow a - b = 3 \quad (1)$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4b - a$$

$$\rightarrow 4b - a = 6 \quad (2)$$

نجمع (1) مع (2) نجد :

$$a = 6 \ , \ b = 3$$

مثال :

$$\lim \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$\text{اوبيتال} \quad \frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\text{اوبيتال} \quad \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x} \quad \text{اوبيتال} \quad \frac{e^{x} + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

مثال دورة :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x}$$

$$\left(\frac{1 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right)^{x} = \left(\frac{1 + \frac{\frac{3}{2}}{x}}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{x}} \right)^{x} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e$$

مثال دورة :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{x+4}$$

$$x = y - 4 \ , \ y = x + 4$$

$$x \to \infty \qquad y \to \infty$$

$$\lim \left(\frac{y-1}{y-6}\right)^{y} = \left(\frac{1+\frac{-1}{y}}{-\frac{6}{y}}\right)^{y} = \frac{e^{-1}}{e^{-6}} = e^{5}$$

مثال:

$$\lim \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x}-1}\right)$$

$(e^{x}-1)$ (x)

$$\lim \left(\frac{e^{x}-1-x}{xe^{x}-x}\right)$$ لوبيتال $$\lim \frac{e^{x}-1}{e^{x}+xe^{x}-1}$$

لوبيتال $$= \lim_{x \to 0} = \frac{ex}{e^{x}+e^{x}+xe^{x}} = \frac{1}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x \to 0} x^{x}$$

$$\lim e^{x \ln x} \longrightarrow e^{0} = 1$$